La Enseñanza determinista de la probabilidad

Giovanni Sanabria Brenes[1]

Resumen

El presente trabajo analiza las respuestas de docentes en formación, que ya cursaron un curso sobre probabilidad y son estudiantes del TEC de Costa Rica, en un test de situaciones problema de probabilidad con el fin de valorar el manejo que hacen de la aleatoriedad. En las respuestas se evidencia que algunos: no saben hacer explícito el espacio muestral ni la experiencia aleatoria, descuidan las hipótesis que se necesitan para utilizar la probabilidad como un modelo y dan respuestas deterministas a situaciones aleatorias, es decir piensan que hay una única respuesta correcta. ¿Será que se enseña la probabilidad de forma determinista?

Palabras clave: formación de profesores, probabilidad, determinismo, aleatoriedad

Abstract

This paper analyzes the responses of teachers in training, who have already taken a course on probability and are students of the TEC of Costa Rica, in a test of probability problem situations in order to assess the handling they make of randomness. The answers show that some do not know how to make explicit the sample space or the random experience, neglect the hypotheses that are needed to use probability as a model and give deterministic answers to random situations. Could it be that probability is taught in a deterministic way?

Keywords: teacher training , probability, determinism, randomness

Modalidad: Ponencia

I. Introducción

La probabilidad tiene su origen en la aleatoriedad. El concepto de aleatoriedad no es sencillo, pues implica la existencia del azar. Además, como se ha evidenciado en muchas investigaciones, el azar es difícil de comprender para nuestros estudiantes. Sin embargo, es indispensable para abordar el estudio de las probabilidades.

---

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica – Universidad de Costa Rica, Costa Rica.
gsanabria@itcr.ac.cr

Al respecto, Batanero & Serrano (1995) señalan "A pesar de las dificultades filosóficas y psicológicas descritas, las situaciones aleatorias revisten una gran importancia. El problema de asegurar que una sucesión sea aleatoria sigue teniendo una gran actualidad debido a sus aplicaciones."

En Costa Rica, la enseñanza de la probabilidad tanto en secundaria como a nivel universitario está a cargo de docentes formados en Enseñanza de la Matemáticas o de Matemáticos. Esto conlleva un gran inconveniente, la Matemática es una ciencia exacta no da pie a la incertidumbre necesaria en probabilidad, y se suele presentar de forma muy determinista. Así, la formación que reciben los docentes en formación en matemática centrada en el método axiomático deductivo, puede convertirse en un obstáculo para comprender la aleatoriedad. Al respecto, Batanero (2000) señala

> "La misma naturaleza de la estadística es muy diferente de la cultura determinista tradicional en clase de matemáticas. Un indicador de ello es que aun hoy día prosiguen las controversias filosóficas sobre la interpretación y aplicación de conceptos tan básicos como los de probabilidad, aleatoriedad, independencia o contraste de hipótesis, mientras que estas controversias no existen en álgebra o geometría (Batanero y Serrano, 1995)." (p.7)

Además, Elizarrarás (2014) señala que

> "Sin duda, el desarrollo de un pensamiento matemático integral no sólo debe enfocarse al pensamiento determinista sino también y de forma conjunta e interactiva debe incluir el pensamiento estocástico; sólo así, se requiere de incorporar el pensamiento complejo de una forma real. Cabe señalar el desarrollo del pensamiento estocástico corresponde a una forma distinta de aprender porque la idea de azar implica reconocer ciertas sutilezas que permiten la advertencia de lo posible, lo cual no es trivial, requiere de tiempo". (p.26)

En el presente trabajo, se analiza las respuestas a cinco situaciones problemas dadas por nueve docentes en formación. En dichos problemas se analiza el papel que juega la aleatoriedad y se obtienen algunas implicaciones a considerar en la enseñanza de la probabilidad.

II. La muestra

El test se aplicó a nueve estudiantes de la Carrera Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos. Estos estudiantes cursaron en el Segundo semestre del 2017 el curso Elementos del Análisis de Datos y Probabilidad y en este semestre están cursando el curso de Didáctica de la Estadística.

III.Resultados

Se anexa el test aplicado. Este test se aplicó el viernes 23 de marzo del 2018. Seguidamente se analizarán las respuestas dadas por los docentes en formación.

1. Primer problema

Situación #1. En una canasta hay 10 bolas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una bola par? Justifique su respuesta.

Como respuesta correcta a esta situación hay dos opciones:

- No aleatoriedad. Consiste en decir que la probabilidad es del 100% (pues si hay una canasta simplemente me fijo en sus bolas y tomó una bola par). Esto pues la situación no tiene la restricción que la bola deba elegirse al azar.
- Aleatoriedad. Se debe indicar que se va asumir la hipótesis de que la bola es elegida al azar y que bajo esta hipótesis se tiene que la probabilidad es ½.

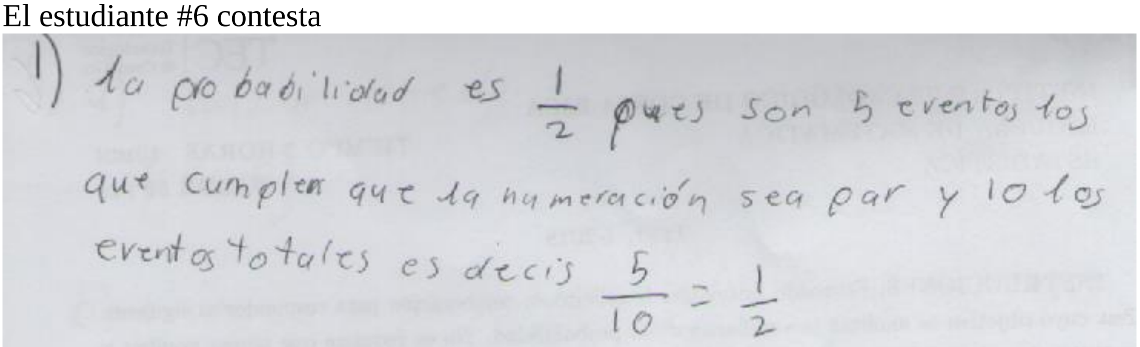
La simple respuesta de ½ no se considera correcta.

Respuesta a la pregunta 1

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	0	9

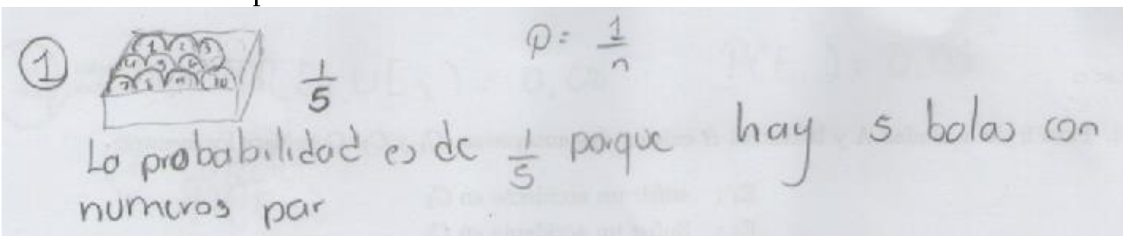
Dentro de las respuestas incorrectas hay 7 respuestas similares a la dada por el estudiante #2: "1/2 o 5/10 pues 5 bolas son pares y son 10 en total".

El estudiante #6 contesta


1) la probabilidad es $\frac{1}{2}$ pues son 5 eventos los que cumplen que la numeración sea par y 10 los eventos totales es decir $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

En esta respuesta se ve como el estudiante considera la situación como aleatoria cuando es determinista.

El estudiante #9 responde



Podemos observar que este estudiante tiene un manejo inadecuado de la regla de Laplace.

Normalmente en un curso de probabilidad teórica, y en la mayoría de los libros de texto, se indica que no todos los procesos o experimentos aleatorios pueden ser descritos por la probabilidad, solo los que cumplan tres requisitos (Sanabria, 2012):

1. Se conocen todos los posibles resultados antes de realizarse el experimento.
2. No se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá en el experimento.
3. El experimento puede repetirse.

A estas hipótesis se deben agregar dos hipótesis más si se quiere aplicar la Ley de Laplace:

4. La cantidad de posibles resultados es finita.
5. Los posibles resultados son equiprobables.

Sin embargo, muchas veces esos requisitos quedan en el primer día de clase y no se reafirma a lo largo del proceso de enseñanza. Particularmente, esta situación tiene que ver con que, si no hay aleatoriedad, los posibles resultados son uno y nos encontramos ante una situación determinista.

Además, es indispensable al utilizar el modelo probabilístico para resolver un problema, indicar los supuestos en los que se basa ese modelo.

2. <u>Segundo problema</u>

Situación #2. Juan tiene cinco camisas: dos son nuevas, tres camisas son viejas. Este domingo va a elegir una para ir a ver a la novia, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo ande con una camisa vieja? Justifique su respuesta.

Este problema es similar al anterior pero se trata de ser más evidente: si Juan va a ver la novia y es domingo, lo más lógico es que elija una camisa nueva.
Las respuestas que se consideran correctas son:

- No aleatoriedad. Consiste en decir que la probabilidad es del 0%. Igual con un buen supuesto se puede considerar que 100% es una respuesta correcta (por ejemplo suponer que Juan solo usa las camisas viejas)
- Aleatoriedad. Se debe indicar que se va asumir la hipótesis de que la camisa es elegida al azar y que bajo esta hipótesis se tiene que la probabilidad es 3/5.

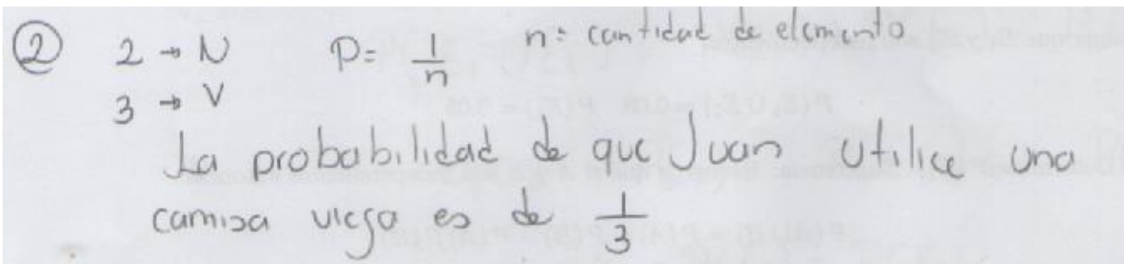
La simple respuesta de 3/5 no se considera correcta.

Respuesta a la pregunta 2

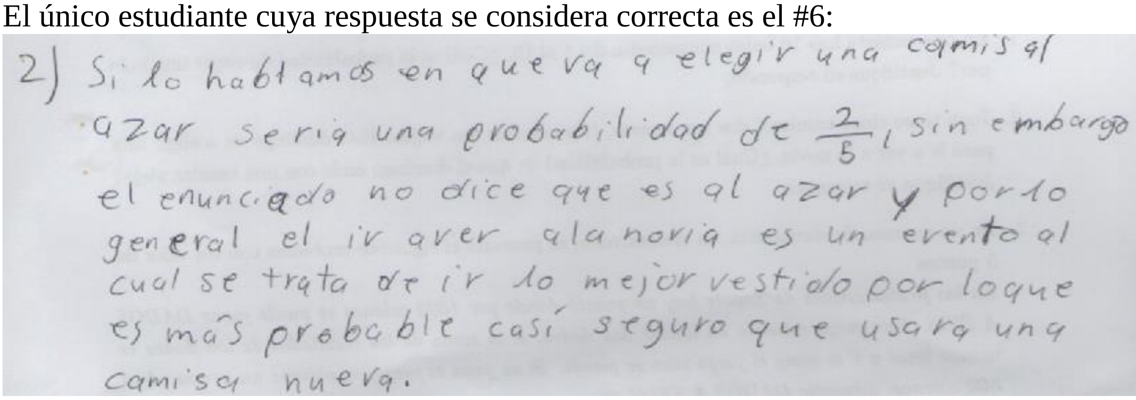
Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	1	8

Dentro de las respuestas incorrectas hay 7 respuestas similares a la dada por el estudiante #4: “3/5 Pues son 5 camisas de las cuales tres son viejas”.

El estudiante #9 mantiene el patrón presentado en la pregunta anterior e indica que la respuesta es


② $2 \to N$ $P = \frac{1}{n}$ n: cantidad de elemento
$3 \to V$
La probabilidad de que Juan utilice una camisa vieja es de $\frac{1}{3}$

El único estudiante cuya respuesta se considera correcta es el #6:


2) Si lo hablamos en que va a elegir una camisa al azar sería una probabilidad de $\frac{2}{5}$, sin embargo el enunciado no dice que es al azar y por lo general el ir aver ala novia es un evento al cual se trata de ir lo mejor vestido por lo que es más probable casí seguro que usara una camisa nueva.

Este estudiante muestra que le da importancia a la aleatoriedad a diferencia de sus compañeros.

Los resultados en esta pregunta reafirman lo observado en la pregunta anterior, la mayoría de los estudiantes no prestan atención en las hipótesis que se deben asumir al aplicar la probabilidad. Esto es esencial cuando se aplica la probabilidad en diferentes ámbitos (ciencias sociales, finanzas,…).

3. <u>Tercer problema</u>

Situación #3. En un examen de secundaria, en el desarrollo, se presenta el siguiente problema con un valor de 5 puntos

En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados, si la suma de los resultados de los dados es menor o igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. ¿Jugaría DADOS A SEIS?
Un estudiante A calculo correctamente la probabilidad del evento G (ganar el juego):

Dado 2

Dado1

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(G)=((15)/(36))\approx 0.416$$

El estudiante respondió al problema indicando que jugaría DADOS A SEIS.
a. ¿Cuántos puntos de los 5 puntos que valía el problema le da a la solución de la respuesta A? Justifique su respuesta.
b. ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

Recordemos que la probabilidad es un insumo para la toma de decisiones, pero no toma la decisión por nosotros. La decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar. Así, esta situación introduce un concepto importante en la aplicación de probabilidades que usualmente se evade en su enseñanza: el concepto de riesgo.

Para esta situación (pregunta a) se considera como respuesta correcta el dar entre 3 y 4 puntos pues calculó correctamente la probabilidad, pero no justificó su respuesta. Y es que la probabilidad de un 41.6% puede ser atractiva para arriesgarse a jugar DADOS A SEIS.

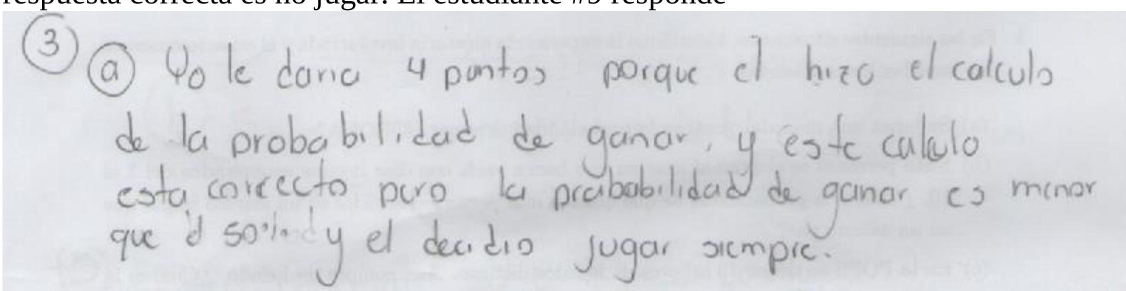
Si se piensa que la respuesta correcta única es no jugar DADOS A SEIS pues la probabilidad es menor al 50%, es reducir el problema al determinismo. No hay respuestas correctas a situaciones aleatorias, hay respuestas con cierto grado de certeza.

Respuesta a la pregunta 3a

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	0	9

Las respuestas incorrectas obtenidas fueron clasificadas (no fue una clasificación a-priori establecida) en:

- Opinión personal (estudiantes: #1,#2). Consideran que la decisión es una opinión personal ajena a la probabilidad. Por ejemplo, el estudiante #2 indica: "Los 5, pues la pregunta es si jugaría y él en su opinión sí jugaría".
- Incompletas (estudiantes: #4, #5,#7, #8). Dan menos de 5 puntos a la respuesta dada pero no justifican. Por ejemplo, el estudiante #8 indica: "le daría 3.5 puntos, pues hizo el cálculo de probabilidad"
- Determinismo (estudiantes: #3,#6,#9). Dan menos puntos pues consideran que la respuesta correcta es no jugar. El estudiante #9 responde


3 a Yo le daría 4 puntos porque el hizo el calculo de la probabilidad de ganar, y este calculo esta correcto pero la probabilidad de ganar es menor que el 50% y el decidio jugar siempre.

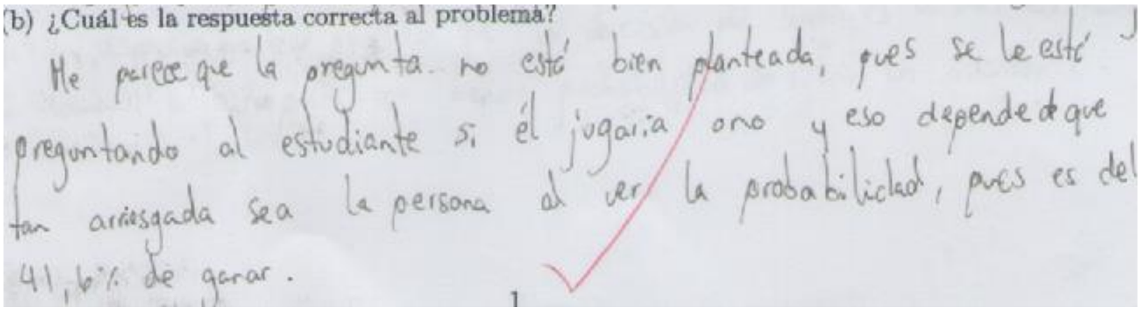
Respuesta a la pregunta 3b

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	2	7

Las respuestas incorrectas se clasifican en:

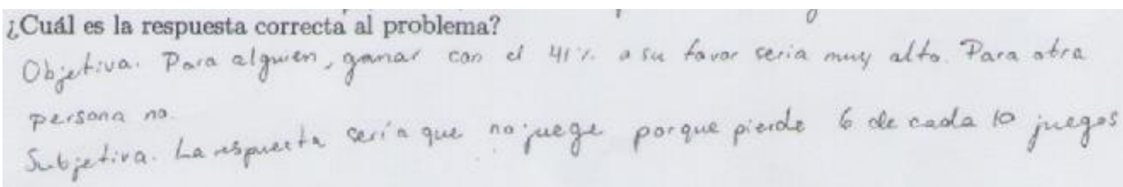
- Determinismo. Los estudiantes #2, #6, #7, #8 y #9 consideran que la respuesta es no jugar pues la probabilidad de ganar es menor al 50%. Llama la atención que algunos estudiantes, que dieron respuesta incompleta en a), tenían una posición determinista de acuerdo a su respuesta en b) (Estudiantes #7 y #8)
- No responde. Los estudiantes #3 y #5 no responden a la pregunta.

Los estudiantes #1 y #4 dan respuestas que se pueden considerar correctas. El estudiante #1 indica:


(b) ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?
Me parece que la pregunta no está bien planteada, pues se le está preguntando al estudiante si él jugaría o no y eso depende de que tan arriesgada sea la persona al ver la probabilidad, pues es del 41,6% de ganar.

Esta respuesta realmente es casi correcta, quizás el defecto es que considera que la pregunta planteada no es tipo de pregunta para un examen debido a su incertidumbre en la respuesta.

El estudiante #4 indica:


¿Cuál es la respuesta correcta al problema?
Objetiva. Para alguien, ganar con el 41% a su favor sería muy alto. Para otra persona no.
Subjetiva. La respuesta sería que no juege porque pierde 6 de cada 10 juegos.

En evaluación, por lo general, la mayoría de los problemas de probabilidad se centran en su cálculo y no en toma de decisiones, para reducir la incertidumbre en las respuestas. Esto posiblemente por mera tradición. Sin embargo, esta forma de evaluar limita el potencial aplicativo de la probabilidad. Actualmente han surgido otras opciones de evaluar, como la evaluación por medio en proyectos, que el caso de la probabilidad debería tomar en cuenta la variación en las respuestas.

4. <u>Cuarto problema</u>

Situación #4. *Para ir de la ciudad A a la ciudad B existen dos autopistas:* C_1 *y* C_2 *. Considere los eventos:*

$$E_1: \quad \text{sufrir un accidente en } C_1$$
$$E_2: \quad \text{Sufrir un accidente en } C_2$$

Suponga que: E_1 *y* E_2 *son independientes,* $P(E_1 \cup E_2)=0.08$, $P(E_1)=0.05$

a. *Determine* $P(E_2)$*. Sugerencia: Recuerde que si A y B son independientes entonces* $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
b. *Juan debe ir de la ciudad A a la ciudad B y toma la decisión de ir por la autopista* C_2 *. ¿Es correcta la decisión de Juan? Justifique su respuesta.*

El problema 4a no es objeto de este estudio, es más un distractor para no dar directamente las probabilidades de los eventos E_1 y E_2.

La solución al problema 4a es:

$$P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1)P(E_2)$$

$$\Rightarrow 0.08=0.05+ P(E_2)-0.05\text{x } P(E_2)$$

$$\Rightarrow P(E_2) =0.0315$$

Por lo tanto, hay una mayor probabilidad de sufrir un accidente en la autopista C_1.

Sin embargo, para el problema 4b no se puede decir que la decisión de Juan es la correcta, si es la más correcta en términos de probabilidad. De repente Juan se va por esa autopista y sufre un accidente. Así, no podemos hablar de una única respuesta correcta. Además, las probabilidades de sufrir accidentes en las autopistas son casi similares. Así, la respuesta correcta a 4b, es indicar que no se puede asegurar que la decisión de Juan es la correcta pero si es la más correcta. Esto se puede relacionar con el concepto de aceptación y rechazo que es indispensable en Estadística Inferencial, por ejemplo si debó juzgar la decisión de Juan, la aceptaría pues tomó la decisión más correcta. En cambio otras decisiones se rechazarían.

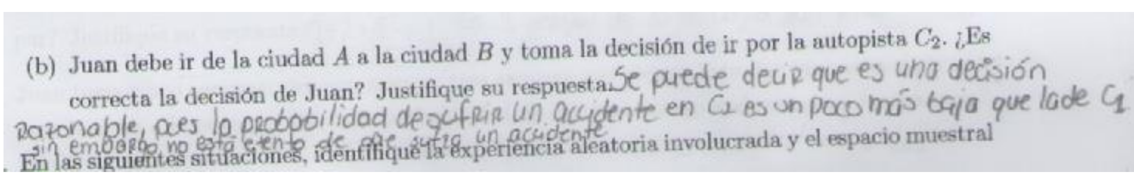
Respuesta a la pregunta 4b

Total de respuestas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	1	8

Las respuestas incorrectas se clasifican en:

- Determinismo. Los estudiantes #1,#2, #4, #5, #6, #7 y #9 consideran que la decisión de Juan es la correcta pues la probabilidad lo indica.
- No responde. El estudiante #3 no responde a la pregunta.

El estudiante #8 da una respuesta correcta al problema:


(b) Juan debe ir de la ciudad A a la ciudad B y toma la decisión de ir por la autopista C_2. ¿Es correcta la decisión de Juan? Justifique su respuesta. Se puede decir que es una decisión razonable, pues la probabilidad de sufrir un accidente en C_2 es un poco más baja que la de C_1 sin embargo no está cierto de que sufra un accidente

En las siguientes situaciones, identifique la experiencia aleatoria involucrada y el espacio muestral

Dado que las probabilidades de sufrir accidentes en las autopistas son casi similares, en la vida real pueden pesar otros factores para tomar la decisión como: experiencia del conductor, si el trayecto es más corto que otro. Si bien, los factores inherentes a la propia carretera se supone que se consideraron para valorar la probabilidad de accidente en la misma, hay conceptos intuitivos de la probabilidad propios del contexto que no pueden ser cuantificables. El conocimiento informal que tenga los involucrados en la situación, junto con el riesgo que se este dispuesto a asumir, nutre la toma de decisión. Esto hace que para tomar decisiones, además del cálculo de probabilidades, se debe tomar el contexto de los datos. ¿Sera que el contexto, del cual se toman los datos de un problema, y el conocimiento informal de los involucrados debe ser considerado como parte de la enseñanza de la probabilidad? Esto haría introducir en la enseñanza de la probabilidad problemas de tipo "análisis de casos" donde la probabilidad se confronte con un contexto en aras de tomar una decisión. Esto no es ajeno al trabajo que se realiza al realizar una investigación utilizando la estocástica, donde muchas veces el contexto le da sentido o refuta algún análisis realizado. Sin lugar a duda las investigaciones y trabajos que se realizan en torno a la enseñanza basada en proyectos (Batanero & Díaz, 2004) y el razonamiento inferencial intuitivo (García & Sánchez, 2014) favorecen una enseñanza de la probabilidad donde el contexto suele tener un papel importante.

5. Quinto problema: experiencias aleatorias

Situación #5. *En las siguientes situaciones, identifique la experiencia aleatoria involucrada y el espacio muestral (no resuelva los problemas):*

a. Se lanza una moneda. ¿cuál es la probabilidad de sacar CORONA?
b. Siete personas se sientan al azar en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de que queden más personas sentadas en un asiento impar que en un asiento par?
c. En la POPS se tienen 10 sabores de helados distintos. Ana compra un helado. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana escoja su helado favorito?

Recordemos que una experiencia aleatoria, es una experiencia donde interviene el azar. Es decir, una experiencia que al realizar genera un resultado que varían dentro de un conjunto de posibles resultados y no se puede predecir. El espacio muestral es el conjunto de posibles resultados de una experiencia aleatoria.

En este problema, las experiencias aleatorias para cada situación son, respectivamente:

a. Lanzar una moneda. Espacio muestral: {corona, escudo}
b. Sentar al azar siete personas en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. Espacio muestral: conjunto de maneras de sentar a las personas
c. Se puede decir que no cuenta con experiencia aleatoria. Es un problema abierto. Otra opción, es decir que la experiencia aleatoria es: elegir un helado al azar de la POPS, donde el helado favorito tiene una mayor probabilidad de ser elegido. Este caso, el espacio muestral es el conjunto de sabores de helados que vende esa sucursal de la POPS.

Los resultados de las respuestas de los 9 estudiantes se resumen en la siguiente tabla:

Respuesta a la pregunta 5

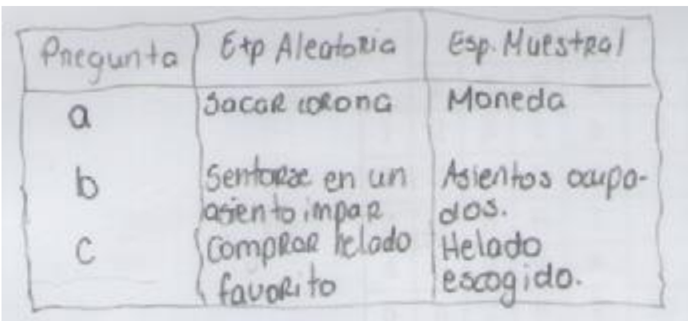
Problema	Experiencia aleatoria		Espacio Muestral	
	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
5a	3	6	5	4
5b	0	9	0	9
5c	2	7	4	5

La mayoría de las respuestas correctas se dieron en la situación 5a y fueron idénticas a la dada anteriormente. Los estudiantes #1 y #5 identificaron correctamente el espacio muestral para esta situación, pero no la experiencia aleatoria. El estudiante #5 no indicó la experiencia aleatoria y el estudiante #1 indicó "exp. Aleatoria: Corona".

Para la 5c, se consideró correcto indicar como experiencia: elegir un helado y como espacio muestral: los 10 sabores de helado. Los estudiantes #1, #5, #7 y #9 indicaron correctamente el espacio muestral pero los estudiantes #1 y #7 indicaron que la experiencia aleatoria es que Ana elija su helado favorito.

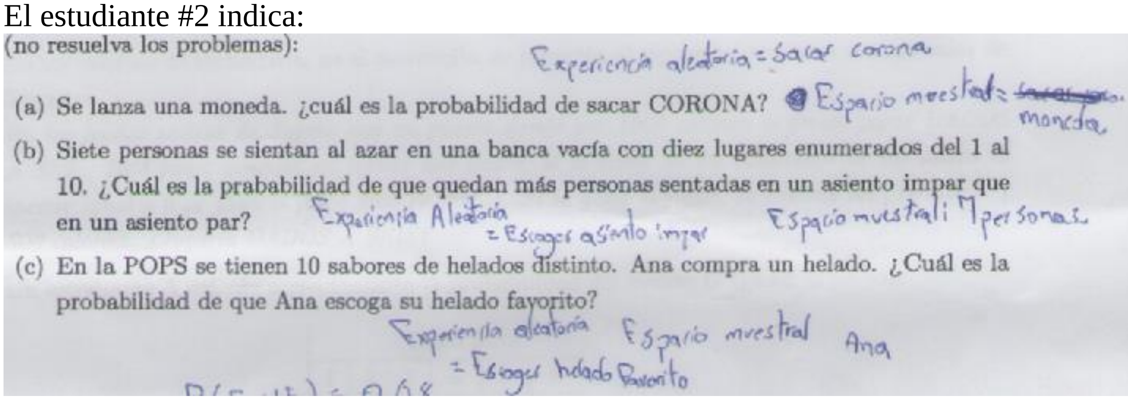
Algunas de las respuestas incorrectas se muestran a continuación.

El estudiante #8 indica:



Pregunta	Exp Aleatoria	Esp. Muestral
a	Sacar corona	Moneda
b	Sentarse en un asiento impar	Asientos ocupados.
c	Comprar helado favorito	Helado escogido.

El estudiante #2 indica:



(no resuelva los problemas):

Experiencia aleatoria = Sacar corona

(a) Se lanza una moneda. ¿cuál es la probabilidad de sacar CORONA? Espacio muestral = ~~sacar...~~ moneda

(b) Siete personas se sientan al azar en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. ¿Cuál es la prababilidad de que quedan más personas sentadas en un asiento impar que en un asiento par? Experiencia Aleatoria = Escoger asiento impar Espacio muestral: 7 personas.

(c) En la POPS se tienen 10 sabores de helados distinto. Ana compra un helado. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana escoga su helado favorito? Experiencia aleatoria = Escoger helado favorito Espacio muestral Ana

Con esta situación se evidencia el poco manejo que tiene los estudiantes de los conceptos de experiencia aleatoria y de espacio muestral. Estos conceptos operacionalizan un concepto más complejo pero indispensable para entender las probabilidades: el concepto de aleatoriedad.

Usualmente estos conceptos se estudian al inicio de un curso de probabilidad, pero conforme avanza el curso se suelen olvidar, no se les da la importancia que merecen y pocas veces se evalúan.

IV. Conclusiones

De manera general, las respuestas dadas por los docentes en formación indican que un buen porcentaje: no saben hacer explícito el espacio muestral ni la experiencia aleatoria, descuidan las hipótesis a asumir al utilizar la probabilidad como un modelo y dan respuestas deterministas (ven solo una única respuesta correcta) a situaciones aleatorias.

Sobre la parte inicial al resolver un problema con probabilidad, en los problemas primero y segundo, se evidenció como algunos aplican la regla de Laplace sin verificar que la situación involucre una experiencia aleatoria o sin suponer una experiencia aleatoria o recrearla, como parte de la resolución del problema. La aleatoriedad es indispensable para hablar de probabilidad. En muchas aplicaciones de la probabilidad, sobre todo en problemas de las ciencias sociales, se parte de supuestos, entre ellos, la existencia de la aleatoriedad.

Sobre la parte final, al dar una respuesta a un problema de toma de decisiones por medio de la probabilidad, las respuestas a los problemas tercero y cuarto evidencia como una gran mayoría de ellas reflejan una respuesta única a situaciones azarosas y consideran como incorrectas otras decisiones por ser menos probables. Quizás el ver la estocástica como parte de la matemática, como se mencionó en la introducción, influya en este tipo de respuestas de los estudiantes.

Además, se evidencia un poco apreciación del azar en las situaciones planteadas, y su relación, a nivel intuitivo, con conceptos ligados a la probabilidad:

- Concepto de riesgo. En un problema de toma de decisiones, la decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que se esta dispuesto a tomar. El concepto de riesgo es indispensable en aplicaciones de probabilidad a las finanzas, por ejemplo.
- Conceptos de aceptación y rechazo. Una decisión no es correcta o incorrecta, más bien se acepta o se rechaza de acuerdo a lo que me indique la probabilidad, pues no sabes con certeza cuál será la mejor decisión. Estos conceptos son indispensables en Estadística Inferencial y sería genial que desde el estudio de las probabilidades se introduzca su uso.

En el problema quinto se evidencia el poco manejo de los conceptos de experiencia aleatoria y espacio muestral.

Por otro lado, producto del análisis realizado a los problemas presentados en el test, sugieren que se valoren otras formas de enseñar en probabilidad, pues por lo general las tareas que se plantean en la enseñanza y aprendizaje del tema y su consecuente evaluación se han centrado en el cálculo de probabilidades. Estas formas son:

- Evaluación por medio de proyectos. Por medio de proyectos de investigación se evidencie que el estudiante asume supuestos, considera la variación en las respuestas, tome en cuenta el contexto de los datos y rechace o acepte sus hipótesis de investigación.
- Evaluación por medio de "análisis de casos". Se le planteen casos al estudiante, reales (tomados de investigaciones) o ficticios, donde el estudiante debe confrontar la

probabilidad con un contexto en aras de tomar una decisión, e incluso analice las posibles decisiones y sus repercusiones.

Estas formas de enseñanza y aprendizaje requieren más investigación para concretarlas; aunque es importante indicar que el uso de proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estocástica no es algo nuevo (Batanero & Díaz (2004), Batanero & Díaz (2011)).

En general, producto de las respuestas anteriores, se puede decir que la enseñanza de la probabilidad se suele reducir a un algoritmo: no interesa el planteamiento inicial del problema (supuesto de aleatoriedad, experiencia aleatoria y espacio muestral), ni la variación en la respuesta (consideración de riesgo, aceptación o rechazo de afirmaciones), solo interesa aplicar posiblemente la Regla de Laplace. De este modo, se pierde la posibilidad del desarrollo del pensamiento probabilístico y la enseñanza de la probabilidad se vuelve determinista.

V. Bibliografía

1. Batanero, C. (2000). ¿ Hacia dónde va la educación estadística. Blaix, 15(2), 13.

2. Batanero, C., & Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Aspectos didácticos de las matemáticas, 125-164. Zaragoza: ICE.

3. Batanero, C., & Díaz, C. (2011). Estadística con proyectos. Granada: Universidad de Granada.

4. Batanero Bernabeu, C., & Serrano Romero, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, (5), 15-28.

5. Elizarrarás, B. (2014). El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docentes para la educación básica: viabilidad, trascendencia y pertinencia. In Segundo congreso internacional: espacio común de formación docente. Recuperado el 10 de setiembre 2018 en http://www. uaimlosmochis. org/ECFD/index. php/2014/2/paper/viewFile/18/12.

6. García, Víctor N.; Sánchez, Ernesto A. (2014). Razonamiento inferencial informal: el caso de la prueba de significación con estudiantes de bachillerato. En González, María Teresa; Codes, Myriam; Arnau, David; Ortega, Tomás (Eds.), Investigación en educación matemática (pp. 345-354). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

7. Sanabria, G. (2012). Comprendiendo las Probabilidades. Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Anexo: Test.

INSTRUCCIONES: Estimado estudiante le solicitó su colaboración para responder al siguiente Test cuyo objetivo es analizar la enseñanza de la probabilidad. No se requiere que ponga nombre y no tiene ninguna validez para el curso. Agradezco su colaboración.

1. En una canasta hay 10 bolas enumeradas del 1 al 10. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una bola par? Justifique su respuesta.

2. Juan tiene cinco camisas: dos son nuevas, tres camisas son viejas. Este domingo va a eligir una para ir a ver a la novia, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo ande con una camisa vieja? Justifique su respuesta.

3. En un examen de secundaria, en el desarrollo, se presenta el siguiente problema con un valor de 5 puntos
En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados, si la suma de los resultados de los dados es menor o igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. ¿Jugaría DADOS A SEIS?

   Un estudiante A calculo correctamente la probabilidad del evento G (ganar el juego):

		Dado 2					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
Dado1	**3**	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

$$P(G) = \frac{15}{36} \approx 0.416$$

   El estudiante respondió al problema indicando que jugaría DADOS A SEIS.

   (a) ¿Cuántos puntos de los 5 puntos que valía el problema le da a la solución de la respuesta A? Justifique su respuesta.

   (b) ¿Cuál es la respuesta correcta al problema?

4. Para ir de la ciudad A a la ciudad B existen dos autopistas: C_1 y C_2. Considere los eventos:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1: &\quad \text{sufrir un accidente en } C_1 \\ \mathrm{E}_2: &\quad \text{Sufrir un accidente en } C_2 \end{aligned}$$

Suponga que E_1 y E_2 son independientes.

$$P(E_1 \cup E_2) = 0.08 \quad P(E_1) = 0.05$$

(a) Determine $P(E_2)$. Sugerencia: Recuerde que si A y B son independientes entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$0.05 + x - 0.05x = 0.08 \Longrightarrow x = 0.0315$$

(b) Juan debe ir de la ciudad A a la ciudad B y toma la decisión de ir por la autopista C_2. ¿Es correcta la decisión de Juan? Justifique su respuesta.

5. En las siguientes situaciones, identifique la experiencia aleatoria involucrada y el espacio muestral (no resuelva los problemas):

(a) Se lanza una moneda. ¿cuál es la probabilidad de sacar CORONA?

(b) Siete personas se sientan al azar en una banca vacía con diez lugares enumerados del 1 al 10. ¿Cuál es la prababilidad de que queden más personas sentadas en un asiento impar que en un asiento par?

(c) En la POPS se tienen 10 sabores de helados distinto. Ana compra un helado. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana escoga su helado favorito?